ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
`http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf18`

Übungsaufgaben – Blatt 11

Zürich, 30. November 2018

Aufgabe 31

Wir wollen zeigen, dass das Vertex-Cover-Problem auch dann NP-schwer ist, wenn man die Eingaben auf Graphen mit maximalem Knotengrad 3 beschränkt. Sei also

$$\text{VC-deg-3} = \{(G,k) \mid G \text{ ist ein ungerichteter Graph mit maximalem Knotengrad 3,} \\ \text{der ein Vertex-Cover der Grösse höchstens } k \text{ enthält}\}.$$

Wir wollen E3SAT $\leq_p$ VC-deg-3 zeigen. Hierfür konstruieren wir für jede E3-KNF-Formel ϕ einen Graphen G_ϕ mit maximalem Knotengrad 3 und eine Zahl k_ϕ, so dass ϕ genau dann erfüllbar ist, wenn G_ϕ ein Vertex-Cover der Grösse höchstens k_ϕ enthält.

Sei $\phi = C_1 \wedge \ldots \wedge C_q$ eine E3-KNF-Formel über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$, wobei $C_j = (l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee l_{j,3})$ für $1 \leq j \leq q$. Für jede Variable x_i nummerieren wir die Vorkommen in den Klauseln (als positives oder negatives Literal) beliebig durch als $x_{i,1}, \ldots, x_{i,m(i)}$.

Dann können wir den Graphen G_ϕ wie folgt definieren: Für jede Variable x_i enthält G_ϕ einen Kreis der Länge $2 \cdot m(i)$, bestehend aus den Knoten

$$T_{i,1}, F_{i,1}, T_{i,2}, F_{i,2}, \ldots, T_{i,m(i)}, F_{i,m(i)}$$

in dieser Reihenfolge. Für jede Klausel C_j enthält G_ϕ ein Dreieck aus den Knoten $V_{j,1}$, $V_{j,2}$, $V_{j,3}$. Diese Teilgraphen sind durch die folgenden zwei Mengen von Kanten miteinander verbunden:

$$E_1 = \{\{T_{i,j}, V_{s,t}\} \mid \text{das } j\text{-te Vorkommen } x_{i,j} \text{ der Variablen } x_i \\ \text{ist das positive Literal } l_{s,t} \text{ in Klausel } C_s\} \quad \text{und}$$

$$E_2 = \{\{F_{i,j}, V_{s,t}\} \mid \text{das } j\text{-te Vorkommen } x_{i,j} \text{ der Variablen } x_i \\ \text{ist das negative Literal } l_{s,t} \text{ in Klausel } C_s\}.$$

Zeigen Sie, dass G_ϕ genau dann ein Vertex-Cover der Grösse $k_\phi = 5q$ hat, wenn ϕ erfüllbar ist. **10 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 32

Sei $L \in \mathrm{VP}$, sei A ein Polynomialzeit-Verifizierer für L. Es gelte, dass für jedes Wort $w \in L$ ein Zeuge x mit $|x| \leq \log_2 |w|$ existiert, so dass A die Eingabe (w, x) akzeptiert. Zeigen Sie, dass dann $L \in \mathrm{P}$ gilt. **10 Punkte**

Aufgabe 33

Der Turm kann auf dem Schachbrett horizontal oder vertikal eine beliebige Anzahl von Feldern weit ziehen. Wir sagen, dass ein Turm eine andere Figur bedroht, wenn er in einem Zug auf das Feld der anderen Figur gelangen kann.

Beschreiben Sie eine KNF-Formel, deren Belegungen die möglichen Platzierungen von Türmen auf einem $(n \times n)$-Schachbrett darstellen, und die genau dann erfüllt ist, wenn genau n Türme platziert sind, die sich gegenseitig nicht bedrohen. **10 Punkte**

Abgabe: Am 7. Dezember nach der Vorlesung im Raum HG G 5 oder bis 10:15 Uhr in die Sammelkästen im Raum CAB F 17.1.