ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf18

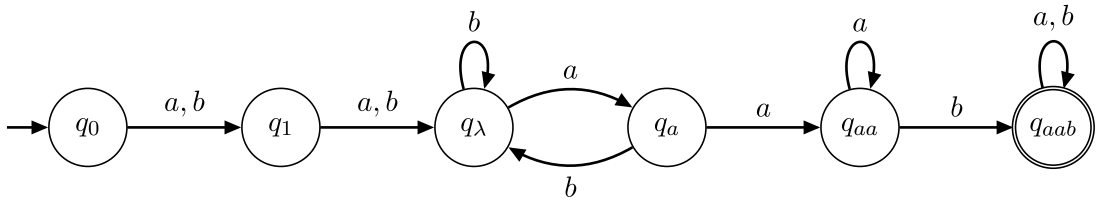
Lösungsvorschläge – Blatt 3

Zürich, 12. Oktober 2018

Lösung zu Aufgabe 7

(a) Der folgende endliche Automat akzeptiert die Sprache

$$L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = xaaby, x, y \in \{a,b\}^*, |x| \geq 2\}\,.$$



Nach dem Lesen der ersten beiden Buchstaben von x ist der Automat im Zustand q_λ. Für jedes Wort $z \in \{\lambda, a, aa\}$ beschreibt q_z das längste aktuell gelesene Präfix des gesuchten Musters aab (ausserhalb der ersten zwei gelesenen Zeichen, in denen das Muster noch nicht gesucht wird). Im Zustand q_{aab} wurde das gesuchte Muster bereits gefunden. Der Startzustand ist der Zustand q_0.

Damit ergeben sich die folgenden Klassen für die Zustände:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kl}[q_{aab}] &= L_1\,,\\
\mathrm{Kl}[q_{aa}] &= \{xz \in \{a,b\}^* \mid |x| = 2 \text{ und } z \text{ endet mit } aa\} - L_1\,,\\
\mathrm{Kl}[q_a] &= \{xz \in \{a,b\}^* \mid |x| = 2 \text{ und } z \text{ endet mit } a\} - L_1 - \mathrm{Kl}[q_{aa}]\,,\\
\mathrm{Kl}[q_0] &= \{\lambda\}\,,\\
\mathrm{Kl}[q_1] &= \{a,b\}\,,\\
\mathrm{Kl}[q_\lambda] &= \{a,b\}^* - \bigcup_{z \in \{0,1,a,aa,aab\}} \mathrm{Kl}[q_z]\,.
\end{aligned}$$

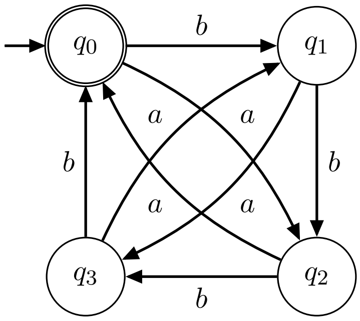
Man beachte, dass es hilfreich sein kann, die Reihenfolge der Klassenbeschreibungen geschickt zu wählen.

(b) Wir bemerken zunächst, dass wir die Bedingung der Sprache L_2 vereinfacht schreiben können. Es gilt

$$L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a + 2 \cdot |w|_b \equiv 3 \cdot |w| \pmod 4\}$$

$$= \{w \in \{a,b\}^* \mid (3 \cdot |w| - |w|_a - 2 \cdot |w|_b) \bmod 4 = 0\}$$
$$= \{w \in \{a,b\}^* \mid (2 \cdot |w|_a + |w|_b) \bmod 4 = 0\}\,.$$

Der folgende endliche Automat akzeptiert die Sprache L_2.



Mit Hilfe der Zustände kann der Automat einfach den Wert des Ausdrucks $2\cdot|w|_a+|w|_b$ modulo 4 für das bereits gelesene Teilwort w speichern. Damit ergeben sich für $i \in \{0,1,2,3\}$ die Klassen

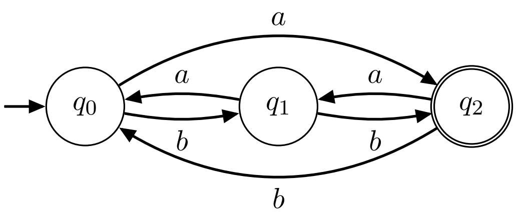
$$\mathrm{Kl}[q_i] = \{w \in \{a,b\}^* \mid (2 \cdot |w|_a + |w|_b) \bmod 4 = i\}\,.$$

Lösung zu Aufgabe 8

Die in der Aufgabenstellung gegebene Sprache L lässt sich schreiben als $L = L_1 \cup L_2$ mit

$$L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid (2|w|_a + |w|_b) \bmod 3 = 2\}\,,$$
$$L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } bba \text{ und endet mit } b\}\,.$$

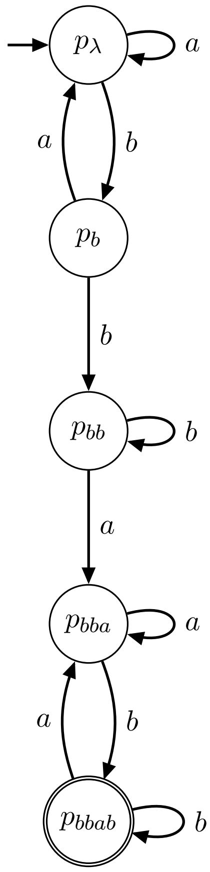
Für die Sprache L_1 lässt sich der folgende Automat A_1 konstruieren:



Dieser Automat zählt in seinen Zuständen die Anzahl von as und bs modulo 3 gemäss der Formel aus L_1. Es gilt für $i \in \{0,1,2\}$, dass

$$\mathrm{Kl}[q_i] = \{w \in \{a,b\}^* \mid (2|w|_a + |w|_b) \bmod 3 = i\}\,.$$

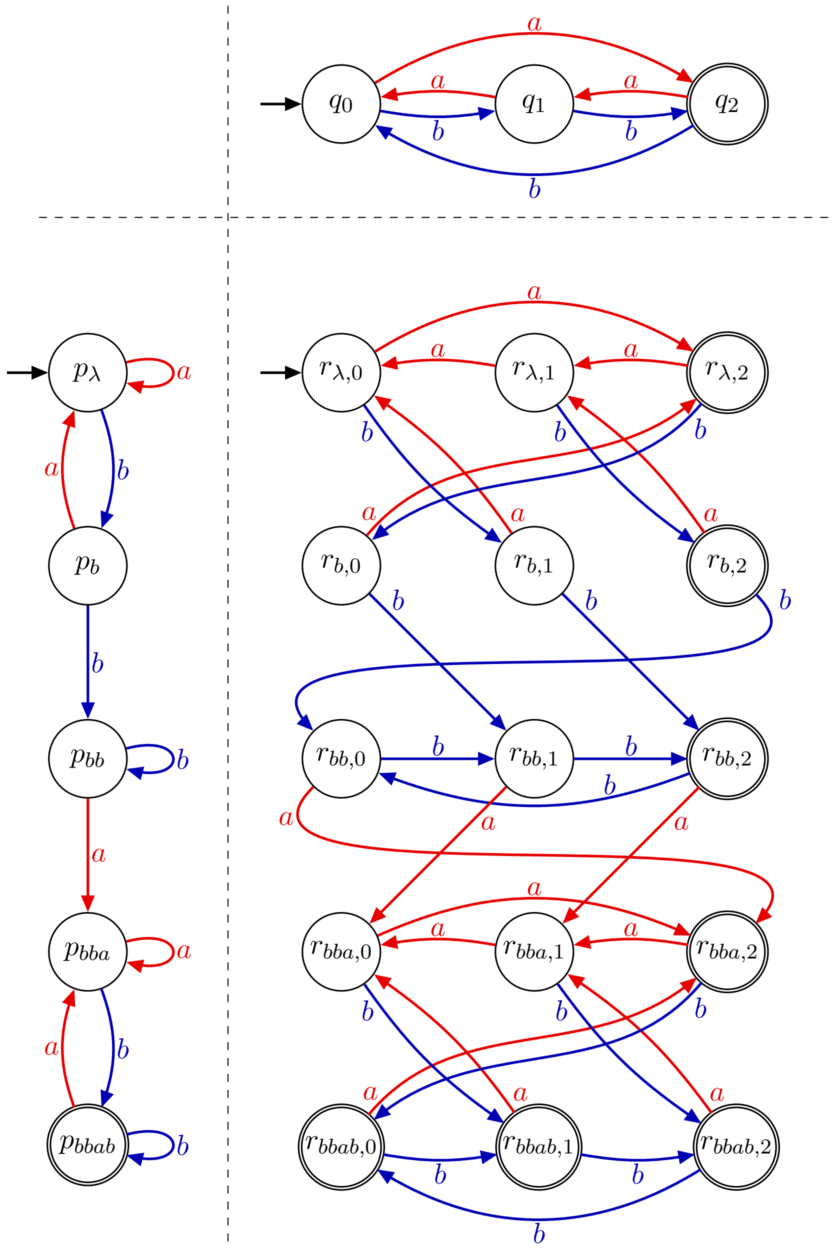
Für die Sprache L_2 lässt sich der folgende Automat A_2 konstruieren:



Die Zustände p_z für $z \in \{\lambda, b, bb, bba\}$ geben an, welches längste Präfix des gesuchten Musters bba aktuell gelesen wurde. Sobald das Muster gefunden wurde, geht der Automat mit dem Lesen eines b in den akzeptierenden Zustand p_{bbab} über, den er mit jedem gelesenen a wieder verlässt. Damit ergeben sich die folgenden Klassen:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Kl}[p_{bbab}] &= L_2\,,\\
\mathrm{Kl}[p_{bba}] &= \{xbbay \mid x, y \in \{a,b\}^*\} - L_2\,,\\
\mathrm{Kl}[p_{bb}] &= \{xbb \mid x \in \{a,b\}^*\} - L_2\,,\\
\mathrm{Kl}[p_{b}] &= \{xb \mid x \in \{a,b\}^*\} - L_2 - \mathrm{Kl}[p_{bb}]\,,\\
\mathrm{Kl}[p_\lambda] &= \{a,b\}^* - \bigcup_{z \in \{b,bb,bba,bbab\}} \mathrm{Kl}[p_z]\,.
\end{aligned}
$$

Mit der Methode des modularen Entwurfs kann man nun aus A_1 und A_2 den folgenden Produktautomaten A konstruieren, der die Sprache $L = L_1 \cup L_2$ akzeptiert. Zur einfacheren Darstellung verwenden wir die Notation $r_{x,y} = \langle q_x, p_y \rangle$. Weil dies ein Produktautomat für die Vereinigung von zwei Sprachen ist, sind alle Zustände akzeptierend, die einen akzeptierenden Zustand aus einem der beiden Teilautomaten enthalten, also die zu q_2 gehörige Spalte und die zu p_{bbab} gehörige Zeile.

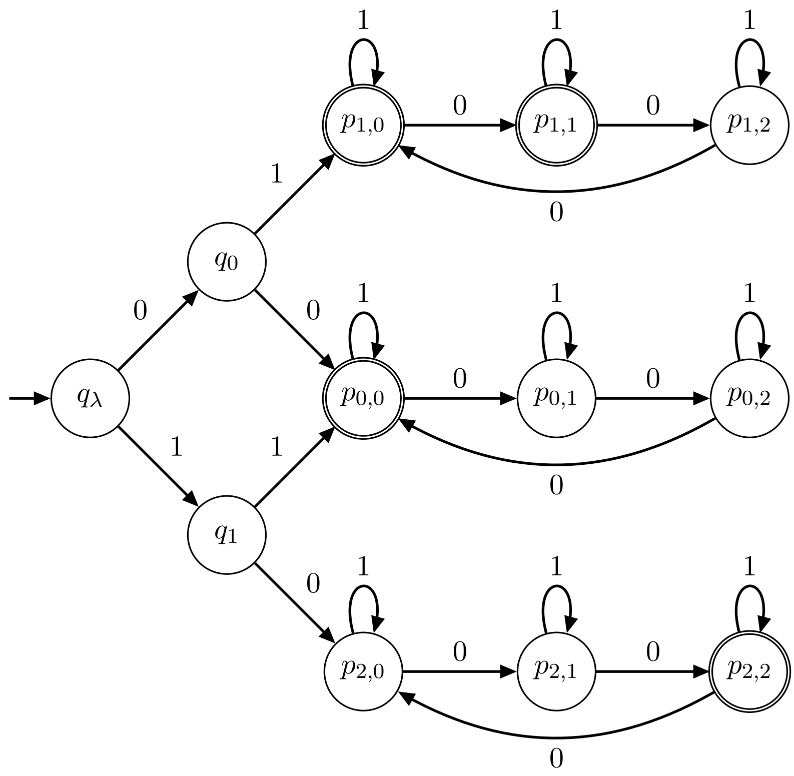


Lösung zu Aufgabe 9

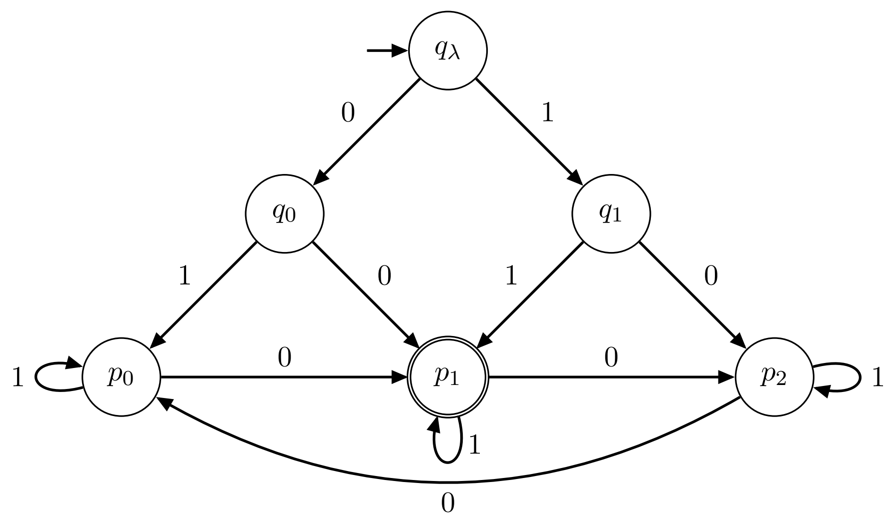
(a) Der folgende endliche Automat akzeptiert die Sprache

$$L_1 = \{xy \in \{0,1\}^* \mid |x| = 2 \text{ und } |y|_0 \equiv \mathrm{Nummer}(x) \pmod 3\}\,.$$

Offenbar kann man einen Automaten A mit drei Zuständen konstruieren, der die Anzahl der Einsen in y modulo 3 zählt. Mit einem Teilautomaten B, der im Wesentlichen einem Binärbaum der Tiefe 2 entspricht, kann man die ersten zwei Zeichen lesen und für jedes mögliche Teilwort x in einen von drei Zuständen verzweigen, die den drei möglichen Werten von $\mathrm{Nummer}(x) \bmod 3$ entsprechen. Dann kann man jeden dieser drei Zustände als Anfangszustand einer Kopie des Automaten A verwenden, mit jeweils angepasstem akzeptierenden Zustand. Es ergibt sich der folgende Automat:



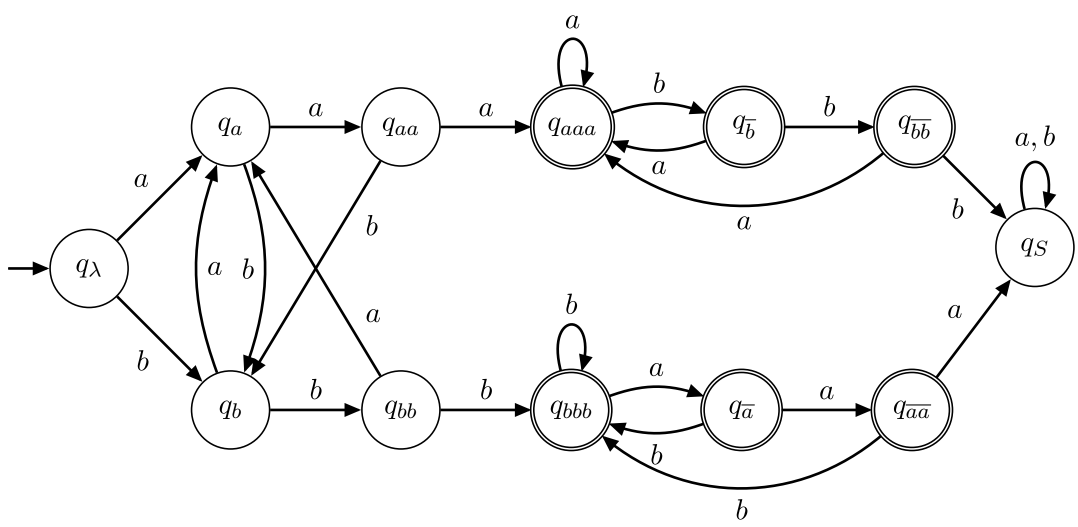
Wir können aber auch einen wesentlich kleineren Automaten für L_1 konstruieren. Statt den Zähler modulo 3 für die drei verschiedenen Möglichkeiten für x jeweils zu wiederholen, reicht es aus, eine Kopie zu nehmen und nur den Start des Zählers in den drei Fällen zu variieren. Es ergibt sich dann der folgende Automat:



Die Transitionen von q_0 und q_1 wurden dabei gemäss der folgenden Idee festgelegt: Falls $\text{Nummer}(x) \bmod 3 = i$, dann müssen noch i Nullen modulo 3 gelesen werden, damit das Wort in L_1 liegt. Also muss nach dem Lesen von $x = \text{Bin}(i)$ der Zustand $p_{(1-i) \bmod 3}$ erreicht werden, weil wir p_1 als akzeptierenden Zustand festgelegt haben.

(b) Der folgende endliche Automat akzeptiert die Sprache

$$L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält genau eines der Teilwörter } aaa \text{ und } bbb\}\,.$$



In den Zuständen q_a, q_{aa} und q_{aaa} bzw. in den Zuständen q_b, q_{bb} und q_{bbb} wird das erste Vorkommen eines der beiden Muster aaa und bbb gesucht. Weil diese beiden Muster komplett disjunkt sind, kann der Automat diese Suche einfach mit zweimal drei Zuständen durchführen, ohne zwei Teilautomaten modular zu simulieren. Sobald eines dieser beiden Muster gefunden wurde, überprüft der Automat in den Zuständen $q_{\overline{b}}$ und $q_{\overline{bb}}$ bzw. in $q_{\overline{a}}$ und $q_{\overline{aa}}$, ob auch das andere Muster vorkommt. Wenn dies der Fall ist, geht er in den Senkenzustand q_S über. Alle Zustände, die der Automat nach dem Lesen des ersten Musters erreicht, bis auf den Senkenzustand, sind akzeptierend.