ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
`http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf18`

Lösungsvorschläge – Blatt 4

Zürich, 19. Oktober 2018

Lösung zu Aufgabe 10

(a) Wir zeigen mit Hilfe von Lemma 3.3 aus dem Buch, dass die Sprache

$$L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}, j > i + 2k\}$$

nicht regulär ist. Angenommen, L_1 sei regulär. Dann gibt es einen Automaten $A_1 = (Q, \{a, b, c\}, \delta, q_0, F)$ mit $L(A_1) = L_1$. Sei $m = |Q|$. Wir betrachten die Wörter

$$b^{2k+1} \quad \text{für } k \in \{1, \ldots, m + 1\}\,.$$

Weil dies $m + 1$ Wörter sind, also mehr Wörter als A_1 Zustände hat, gibt es $i, j \in \{1, \ldots, m + 1\}$ mit $i < j$, so dass

$$\hat{\delta}(q_0, b^{2i+1}) = \hat{\delta}(q_0, b^{2j+1})\,.$$

Nach Lemma 3.3 gilt nun für alle $z \in \{a, b, c\}^*$, dass

$$b^{2i+1}z \in L_1 \iff b^{2j+1}z \in L_1.$$

Die Wahl von $z = c^j$ führt aber zum Widerspruch, weil

$$b^{2i+1}z = b^{2i+1}c^j \notin L_1$$

(wegen $2i + 1 < 2j$) und

$$b^{2j+1}z = b^{2j+1}c^j \in L_1$$

gilt. Also ist die Annahme falsch und L_1 ist nicht regulär.

(b) Wir verwenden das Pumping-Lemma, um zu zeigen, dass die Sprache

$$L_2 = \{wabw^{\mathsf{R}} \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

nicht regulär ist. Angenommen, L_2 sei regulär. Dann existiert nach dem Pumping-Lemma (Lemma 3.4) eine Konstante $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $w \in \{a, b\}^*$ mit $|w| \geq n_0$ in drei Teile y, x und z zerlegen lässt, so dass

1. $|yx| \leq n_0$,
2. $|x| \geq 1$ und
3. entweder $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L_2$ oder $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L_2 = \emptyset$.

Wir wählen das Wort $w = a^{n_0}aba^{n_0}$. Offenbar gilt $|w| \geq n_0$. Also muss es eine Zerlegung $w = yxz$ von w geben, die die Bedingungen (i), (ii) und (iii) erfüllt. Wegen (i) gilt $|yx| \leq n_0$, also ist $y = a^l$ und $x = a^m$ für $l, m \in \mathbb{N}$ mit $l + m \leq n_0$, also insbesondere $m \leq n_0$. Wegen (ii) gilt weiter $m > 0$. Da $w \in L_2$, gilt nach (iii), dass auch

$$\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} = \{a^{n_0+(k-1)m}aba^{n_0} \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L_2 .$$

Dies ist aber ein Widerspruch, da $yx^2z = a^{n_0+m}aba^{n_0} \notin L_2$. Also ist die Annahme falsch und L_2 ist nicht regulär.

Lösung zu Aufgabe 11

(a) Sei $L_3 = \{0^{n^2 \cdot 2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wir beweisen mit Hilfe der Kolmogorov-Komplexität, dass L_3 nicht regulär ist.

Angenommen, $L = L_3$ sei regulär. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $0^{m^2 \cdot 2^m + (2m+1) \cdot 2^{m+1} - 1}$ das erste Wort in der Sprache

$$L_{0^{m^2 \cdot 2^m + 1}} = \{y \mid 0^{m^2 \cdot 2^m + 1}y \in L\} ,$$

weil $(m + 1)^2 \cdot 2^{m+1} = m^2 \cdot 2^m + m^2 \cdot 2^m + (2m + 1) \cdot 2^{m+1}$ gilt. Nach Satz 3.1 aus dem Buch existiert eine Konstante c, unabhängig von m, so dass

$$K(0^{m^2 \cdot 2^m + (2m+1) \cdot 2^{m+1} - 1}) \leq \lceil \log_2(1 + 1) \rceil + c = 1 + c .$$

Da es nur endlich viele Programme der konstanten Länge $1 + c$ gibt, aber unendlich viele Wörter der Form $0^{m^2 \cdot 2^m + (2m+1) \cdot 2^{m+1} - 1}$, ist dies ein Widerspruch. Also ist die Annahme falsch und L_3 ist nicht regulär.

(b) Sei $L_4 = \{u\#v\#w \mid u, v, w \in \{0, 1\}^+ \text{ und } \mathrm{Nummer}(u) \cdot \mathrm{Nummer}(v) = \mathrm{Nummer}(w)\}$. Wir zeigen die Nichtregularität von L_4 mit Hilfe von Lemma 3.3 sowie mit dem Pumping-Lemma. Da L_4 über einem Alphabet der Grösse 3 definiert ist, ist die Methode der Kolmogorov-Komplexität nicht unmittelbar anwendbar.

(1) *Beweis mit Hilfe von Lemma 3.3:* Angenommen, L_4 sei regulär. Dann gibt es einen Automaten $A_4 = (Q, \{0, 1, \#\}, \delta, q_0, F)$ mit $L(A_4) = L_4$. Sei $m = |Q|$. Wir betrachten die Wörter

$$1\#1\#, 1^2\#1\#, 1^3\#1\#, \ldots, 1^{m+1}\#1\# .$$

Weil dies $m + 1$ Wörter sind, also mehr Wörter als A_4 Zustände hat, gibt es $i, j \in \{1, \ldots, m + 1\}$ mit $i < j$, so dass

$$\hat{\delta}(q_0, 1^i\#1\#) = \hat{\delta}(q_0, 1^j\#1\#).$$

Nach Lemma 3.3 gilt nun für alle $z \in \{0, 1, \#\}^*$, dass

$$1^i\#1\#z \in L_4 \iff 1^j\#1\#z \in L_4.$$

Die Wahl von $z = 1^i$ führt aber zu einem Widerspruch, weil $1^i\#1\#z = 1^i\#1\#1^i \in L_4$ und $1^j\#1\#z = 1^j\#1\#1^i \notin L_4$ gilt. Also ist die Annahme falsch und L_4 ist nicht regulär.

(2) *Beweis mit Hilfe des Pumping-Lemmas:* Angenommen, L_4 sei regulär. Dann existiert nach dem Pumping-Lemma (Lemma 3.4) eine Konstante $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $w \in \{0,1,\#\}^*$ mit $|w| \geq n_0$ in drei Teile y, x und z zerlegen lässt, so dass

(i) $|yx| \leq n_0$,

(ii) $|x| \geq 1$ und

(iii) entweder $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L_4$ oder $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L_4 = \emptyset$.

Wir wählen das Wort $w = 1^{n_0}\#1\#1^{n_0}$. Offenbar gilt $|w| \geq n_0$. Also muss es eine Zerlegung $w = yxz$ von w geben, die die Bedingungen (i), (ii) und (iii) erfüllt. Wegen (i) gilt $|yx| \leq n_0$, also ist $y = 1^l$ und $x = 1^m$ für $l, m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n_0$. Wegen (ii) gilt weiter $m > 0$. Da $w \in L_4$, gilt nach (iii), dass auch

$$\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} = \{1^{n_0+(k-1)\cdot m}\#1\#1^{n_0} \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L_4\,.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, da $yx^2z = 1^{n_0+m}\#1\#1^{n_0} \notin L_4$. Also ist die Annahme falsch und L_4 ist nicht regulär.

Lösung zu Aufgabe 12

(a) Wir verwenden das Pumping-Lemma, um zu zeigen, dass die Sprache

$$L_5 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 \neq |w|_1\}$$

nicht regulär ist. Angenommen, L_5 sei regulär. Dann existiert nach dem Pumping-Lemma (Lemma 3.4) eine Konstante $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $w \in \{0,1\}^*$ mit $|w| \geq n_0$ in drei Teile y, x und z zerlegen lässt, so dass

(i) $|yx| \leq n_0$,

(ii) $|x| \geq 1$ und

(iii) entweder $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L_5$ oder $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L_5 = \emptyset$.

Wir wählen das Wort $w = 0^{n_0}1^{n_0}$. Offenbar gilt $|w| \geq n_0$. Also muss es eine Zerlegung $w = yxz$ von w geben, die die Bedingungen (i), (ii) und (iii) erfüllt. Wegen (i) gilt $|yx| \leq n_0$, also ist $y = 0^l$ und $x = 0^m$ für $l, m \in \mathbb{N}$ mit $l + m \leq n_0$, also insbesondere $m \leq n_0$. Wegen (ii) gilt weiter $m > 0$. Da $w \notin L_5$, gilt nach (iii), dass auch

$$\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} = \{0^{n_0+(k-1)m}1^{n_0} \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L_5 = \emptyset\,.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, da $yx^2z = 0^{n_0+m}1^{n_0} \in L_5$. Also ist die Annahme falsch und L_5 ist nicht regulär.

(b) Wir zeigen, dass die Sprache

$$L = L_5 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 \neq |w|_1\}\,,$$

von der wir aus Aufgabenteil (a) wissen, dass sie nichtregulär ist, die Bedingungen des abgeschwächten Pumping-Lemmas mit den Bedingungen (i′), (ii) und (iii′) erfüllt. Sei $n_0 = 3$. Wir müssen für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq 3$ eine Zerlegung $w = yxz$ angeben, die die Bedingungen (i′), (ii) und (iii′) erfüllt. Hierfür unterscheiden wir drei Fälle:

1. Sei $w = 0^m$ für ein $m \geq 3$. Dann wählen wir $y = \lambda$ und $x = 0$. Diese Wahl erfüllt offenbar die Bedingungen (i′) und (ii). Wir zeigen, dass auch (iii′) erfüllt ist: Alle Wörter der Form yx^kz enthalten eine positive Anzahl von Nullen, aber keine Eins. Damit ist $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L_5$.
2. Sei $w = 1^m$ für ein $m \geq 3$. Dieser Fall ist völlig analog.
3. Sei $|w|_0, |w|_1 \geq 1$ und $|w| \geq 3$. Sei $w = a_1a_2 \dots a_m$ mit $a_i \in \{0,1\}$ für alle i. Dann gibt es eine Position i, so dass $a_i \neq a_{i+1}$, es kommt also irgendwo das Teilwort 01 oder 10 in w vor. Wir wählen $y = a_1 \dots a_{i-1}$ und $x = a_ia_{i+1}$. Damit sind (i′) und (ii) erfüllt. (Man beachte, dass die Bedingung (i) aus dem ursprünglichen Pumping-Lemma nicht erfüllt sein muss, weil wir nicht wissen, ob das Teilwort 01 bzw. 10 in den ersten n_0 Zeichen von w vorkommt.) Das Hinzufügen oder Entfernen von 01 (bzw. 10) zu einem Wort mit unterschiedlicher Anzahl von Nullen und Einsen erzeugt wieder ein Wort mit unterschiedlicher Anzahl von Nullen und Einsen. Damit gilt $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L_5$.

(c) Wir betrachten die Sprache

$$L = \{1\}^+\{0^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}^* .$$

Wir zeigen zunächst, dass L nichtregulär ist. Angenommen, L sei regulär. Dann gibt es einen Automaten $A = (Q, \{0,1\}, \delta, q_0, F)$ mit $L(A) = L$. Sei $m = |Q|$. Wir betrachten die Wörter

$$10, 10^2, 10^5, 10^{10}, \dots, 10^{m^2+1}.$$

Weil dies $m+1$ Wörter sind, also mehr Wörter als A Zustände hat, gibt es $i, j \in \{0, \dots, m\}$ mit $i < j$, so dass

$$\hat{\delta}(q_0, 10^{i^2+1}) = \hat{\delta}(q_0, 10^{j^2+1}) .$$

Nach Lemma 3.3 gilt nun für alle $z \in \{0,1\}^*$, dass

$$10^{i^2+1}z \in L \iff 10^{j^2+1}z \in L .$$

Die Wahl von $z = 0^{2i}$ führt aber zum Widerspruch, weil

$$10^{i^2+1}z = 10^{i^2+1}0^{2i} = 10^{(i+1)^2} \in L$$

und $10^{j^2+1}z = 10^{j^2+1}0^{2i} \notin L$ gilt. Letzteres gilt, weil $j^2 + 1 + 2i$ echt kleiner ist als $(j+1)^2$ und keine andere Quadratzahl zwischen j^2 und $(j+1)^2$ liegt. Also ist die Annahme falsch und L ist nicht regulär.

Nun zeigen wir, dass L die Bedingungen (i), (ii) und (iii′) des leicht abgeschwächten Pumping-Lemmas erfüllt. Sei $n_0 = 1$. Wir müssen für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq 1$ eine Zerlegung $w = yxz$ angeben, die die Bedingungen (i), (ii) und (iii′) erfüllt. Hierfür unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Falls das Wort w mit 1 beginnt, hat es die Form $w = 1^m0^{n^2}$ für $m > 0$. Wir wählen $y = \lambda$ und $x = 1$. Dann sind die Bedingungen (i) und (ii) offenbar erfüllt. Falls $m = 1$, dann ist $yz \in \{0\}^*$, also $yz \in L$. Falls $m > 1$, dann ist $yz = 1^{m-1}0^{n^2}$ ebenfalls in L. Für alle $k \geq 1$ ist yx^kz offenbar in L enthalten, weil sich durch das Pumpen nur die Anzahl der Einsen ändert.

2. Falls das Wort w mit 0 beginnt, können wir $y = \lambda$ und $x = 0$ wählen. Wieder sind (i) und (ii) erfüllt und für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $yx^k z \in \{0\}^*$, also $yx^k z \in L$.

Bemerkung: Es ist auch möglich, allerdings viel komplizierter, eine Sprache L zu finden, die nichtregulär ist, aber die Bedingungen (i), (ii) und (iii) des Pumping-Lemmas aus der Vorlesung erfüllt.