ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
`http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf18`

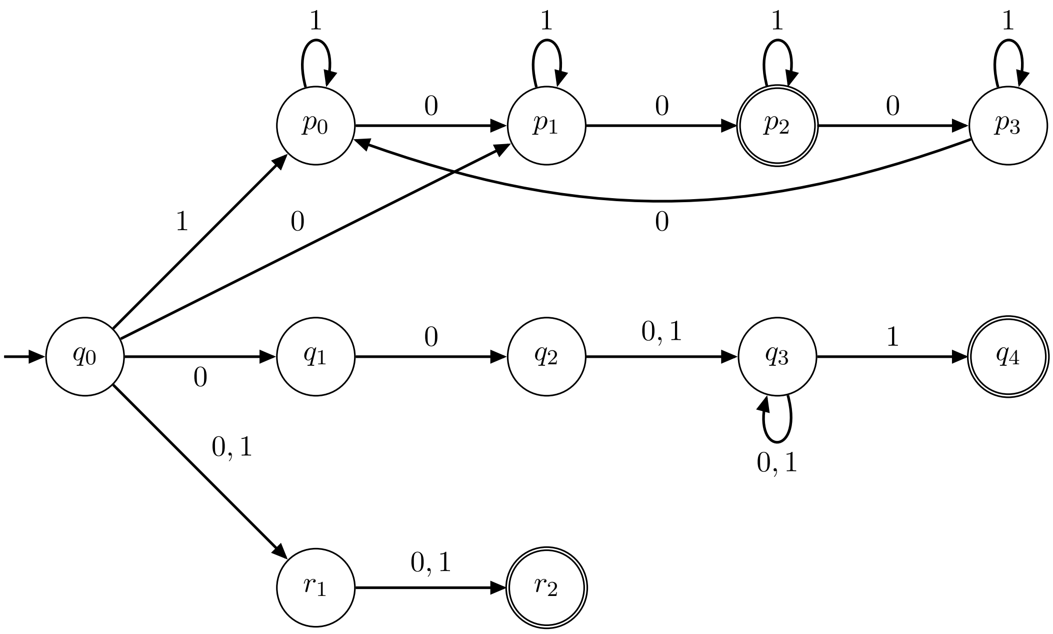
Lösungsvorschläge – Blatt 5

Zürich, 26. Oktober 2018

Lösung zu Aufgabe 13

Der folgende nichtdeterministische endliche Automat M akzeptiert die Sprache

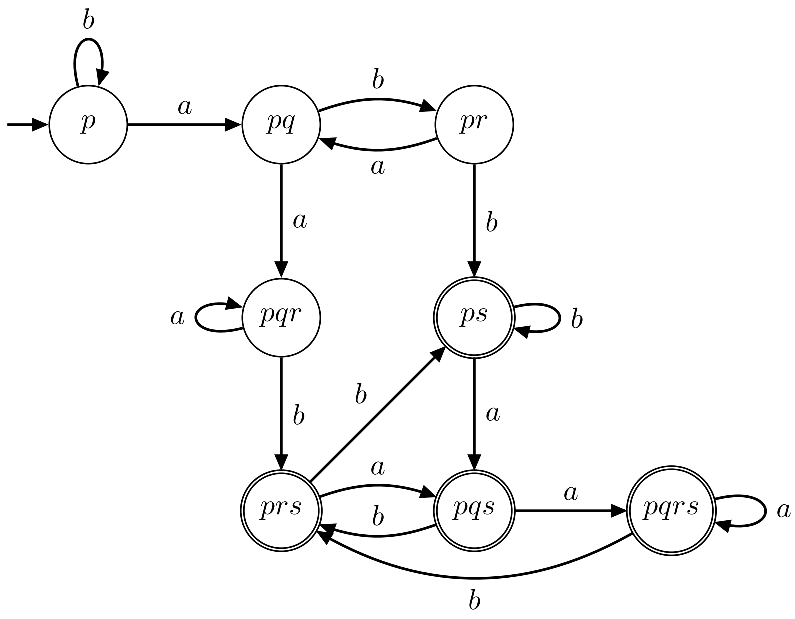
$$\begin{aligned} L = \{x \in \{0,1\}^* \mid\ & |x|_0 \bmod 4 = 2 \\ & \text{oder } x = 00y1 \text{ für } y \in \{0,1\}^+ \\ & \text{oder } |x| = 2\}\ . \end{aligned}$$



Der NEA besteht aus drei Teilautomaten für die drei Bedingungen der Sprache L. Vom Startzustand q_0 aus verzweigt M nichtdeterministisch in einen der drei Teilautomaten. In den Zuständen p_0, p_1, p_2 und p_3 zählt M die Anzahl der Nullen im Eingabewort modulo vier. Falls diese Zählung 2 ergibt, ist die erste der drei Bedingungen erfüllt und M akzeptiert die Eingabe im Zustand p_2. In den Zuständen q_1 bis q_4 sucht M das Muster $00y1$ für die zweite Bedingung von L. Dabei entscheidet M im Zustand q_3 nichtdeterministisch, wann das Suffix 1 beginnt. Das Präfix 00 des Musters wird bereits bei den Übergängen von q_0 nach q_1 und von q_1 nach q_2 gelesen. Mit Hilfe der Zustände r_1 und r_2 testet M die dritte Bedingung und liest auf dem Weg von q_0 nach r_2 genau zwei beliebige Symbole. Falls dann die komplette Eingabe gelesen wurde, akzeptiert M im Zustand r_3.

Lösung zu Aufgabe 14

Die Anwendung der Potenzmengenkonstruktion auf den auf dem Aufgabenblatt gezeigten NEA ergibt den folgenden deterministischen endlichen Automaten A. Dabei wurden alle nicht erreichbaren Zustände weggelassen. Zur einfacheren graphischen Darstellung wurde die Beschriftung der Zustände verkürzt, pqr steht zum Beispiel für den Zustand $\langle\{p, q, r\}\rangle$.



Man beachte, dass von den 4 akzeptierenden Zuständen aus jeweils nur akzeptierende Zustände erreichbar sind. Deshalb könnte man diese 4 Zustände zu einem zusammenfassen und erhielte einen kleineren äquivalenten EA.

Lösung zu Aufgabe 15

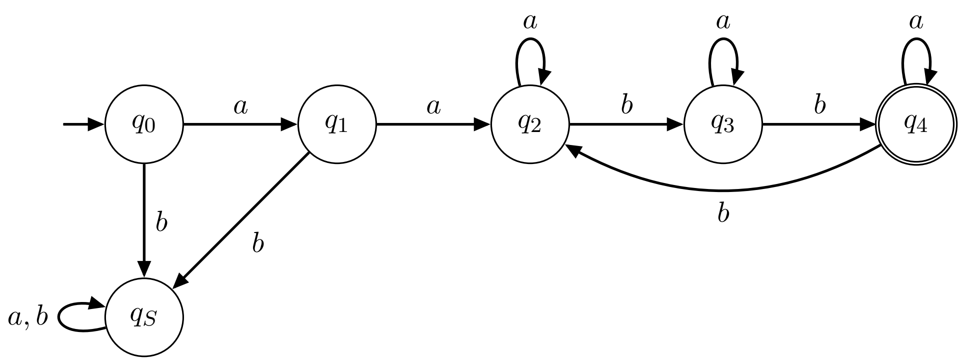
Um zu zeigen, dass jeder deterministische endliche Automat A, der die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b = 2 \bmod 3 \text{ und } w \text{ beginnt mit } aa\}$$

akzeptiert, mindestens 6 Zustände benötigt, bestimmen wir 6 Wörter $w_1, \ldots, w_6$ und zeigen, dass diese den Automaten in 6 paarweise verschiedene Zustände führen müssen. Falls es einen EA gibt, der mit dem Lesen von zwei verschiedenen Wörtern w_i und w_j in demselben Zustand endet, dann gilt nach Lemma 3.3 aus dem Buch für jedes $z \in \{a, b\}^*$, dass dann auch $w_i z$ und $w_j z$ den Automaten in denselben Zustand führen. Wir wollen zeigen, dass dies für einen Automaten mit weniger als 6 Zuständen nicht möglich ist, indem wir für je zwei verschiedene Wörter w_i und w_j ein Wort $z_{i,j}$ angeben, so dass

$$w_i z_{i,j} \in L(A) \iff w_j z_{i,j} \notin L(A)\,. \tag{1}$$

Eine Strategie, um geeignete Wörter $w_1, \ldots, w_6$ zu bestimmen, besteht darin, zunächst einen EA A mit 6 Zuständen für die Sprache L zu entwerfen, und dann für jeden Zustand q das kürzeste Wort aus der Klasse $\mathrm{Kl}[q]$ zu wählen. Der folgende Automat A mit 6 Zuständen akzeptiert die Sprache L.



Die kürzesten Wörter in den Zustandsklassen von A sind $w_1 = \lambda$, $w_2 = a$, $w_3 = b$, $w_4 = aa$, $w_5 = aab$ und $w_6 = aabb$. Die folgende Tabelle gibt für alle Paare (w_i, w_j) mit $i < j$ jeweils ein Wort $z_{i,j}$ an.

$z_{i,j}$	$w_2 = a$	$w_3 = b$	$w_4 = aa$	$w_5 = aab$	$w_6 = aabb$
$w_1 = \lambda$	abb	$aabb$	bb	b	λ
$w_2 = a$	–	abb	bb	b	λ
$w_3 = b$	–	–	bb	b	λ
$w_4 = aa$	–	–	–	b	λ
$w_5 = aab$	–	–	–	–	λ

Es ist einfach zu sehen, dass diese Wörter die Bedingung (1) erfüllen, zum Beispiel ist $w_3 z_{3,5} = bb \notin L(A)$, aber $w_5 z_{3,5} = aabb \in L(A)$.

Lösung zu Bonus-Aufgabe 16

(a) Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein λ-NEA. Sei für alle Zustände $q \in Q$ die λ-Hülle $H(q)$ definiert als die Menge aller Zustände, die sich von q aus durch eine Folge von λ-Transitionen erreichen lassen, also

$$H(q) := \{p \in Q \mid p \in \hat{\delta}(q, \lambda)\}.$$

Diese Definition lässt sich kanonisch erweitern auf Mengen von Zuständen: Für $P \subseteq Q$ ist $H(P) := \bigcup_{p \in P} H(p)$.

Dann können wir einen äquivalenten NEA $A_N = (Q, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ wie folgt definieren:

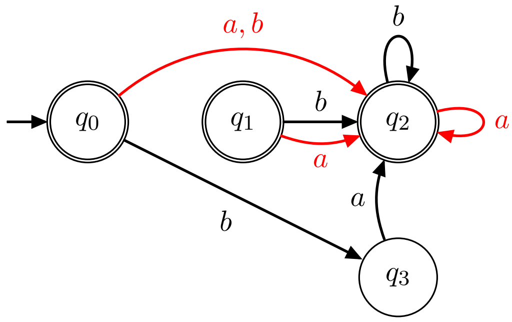
$$\delta_N(q, a) := \bigcup_{p \in H(q)} \delta(p, a)$$

für alle $q \in Q$ und alle $a \in \Sigma$ und

$$F_N := \{p \in Q \mid \hat{\delta}(p, \lambda) \cap F \neq \emptyset\}.$$

Man beachte, dass $q \in H(q)$ gilt für alle $q \in Q$. Damit gilt insbesondere $\delta(q, a) \subseteq \delta_N(q, a)$ für alle $q \in Q$ und alle $a \in \Sigma$. Dadurch, dass alle Zustände aus $H(q)$ berücksichtigt werden, sind alle Folgen von λ-Transitionen abgedeckt, die von q aus zu dem Startpunkt einer a-Transition führen. Weil alle Zustände, von denen aus ein akzeptierender Zustand durch eine Folge von λ-Transitionen erreichbar ist, in dem neuen Automaten selbst zu akzeptierenden Zuständen werden, ist garantiert, dass jedes von A akzeptierte Wort auch in A_N akzeptiert wird.

(b) In dem λ-NEA gilt $H(q_0) = \{q_0, q_1, q_3\}$, $H(q_1) = \{q_1, q_3\}$, $H(q_2) = \{q_2, q_3\}$ und $H(q_3) = \{q_3\}$. Also ergibt sich mit dieser Konstruktion der folgende äquivalente NEA A_N:



In der Abbildung sind die neu eingefügten Transitionen rot gezeichnet. Man beachte, dass es durch die Konstruktion passieren kann, dass einige Zustände nicht mehr erreichbar sind, wie der Zustand q_1 in dem obigen Beispiel. Solche nicht erreichbaren Zustände können natürlich weggelassen werden, ohne die Sprache das NEA zu ändern.

(c) Sei $h\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ ein Homomorphismus. Wir beobachten zunächst, dass h vollständig festgelegt ist durch die Angabe von $h(a)$ für alle Buchstaben $a \in \Sigma_1$. Sei nun L eine reguläre Sprache über Σ_1. Dann existiert ein endlicher Automat A mit $L(A) = L$. Wir konstruieren aus A einen λ-NEA M für $h(L)$ wie folgt. Die Grundidee ist, an jeder Transition von A die Beschriftung a durch $h(a)$ zu ersetzen. Falls $|h(a)| \geq 2$, führt dies aber zu einer Transition, die mit einem längeren Wort statt mit einem Buchstaben beschriftet ist. Solche Transitionen ersetzen wir dann durch einen Pfad mit neu eingeführten Zwischenzuständen. Offensichtlich ergibt sich auf diese Weise ein λ-NEA für $h(L)$.

Wir geben nun noch die formale Konstruktion von M an; sei dazu $A = (Q, \Sigma_1, \delta, q_0, F)$. Dann ist $M = (Q_M, \Sigma_2, \delta_M, q_0, F)$, sodass $Q_M = Q \cup Q_Z$, wobei Q_Z die folgende Menge von neuen Zwischenzuständen ist:

$$Q_Z = \bigcup_{a \in \Sigma_1} \{q_{a,1}, \ldots, q_{a,m-1} \mid h(a) = b_1 b_2 \ldots b_m \in \Sigma_2^m, m \geq 2\}\,.$$

Damit lässt sich dann die Transitionsfunktion von M für jeden Zustand $p \in Q$ definieren durch

$$\begin{aligned}
\delta_M(p, \lambda) &= \bigcup_{a \in \Sigma_1} \{\delta(p, a) \mid h(a) = \lambda\}\,, \\
\delta_M(p, b) &= \bigcup_{a \in \Sigma_1} \{\delta(p, a) \mid h(a) = b\} \quad \text{und} \\
\delta_M(p, b_1) &= \bigcup_{a \in \Sigma_1} \{q_{a,1} \mid h(a) = b_1 \ldots b_m \in \Sigma_2^m, m \geq 2\}\,.
\end{aligned}$$

Für die neuen Zustände aus $Q_M - Q$ definieren wir

$$\delta_M(q_{a,i}, b_{i+1}) = \{q_{a,i+1} \mid h(a) = b_1 \ldots b_m \in \Sigma_2^m, m \geq 2\}$$

für alle $i \in \{1, \ldots, m-2\}$ und

$$\delta_M(q_{a,m-1}, b_m) = \{\delta(p, a) \mid h(a) = b_1 \ldots b_m \in \Sigma_2^m, m \geq 2, p \in Q\}\,.$$

Für alle verbleibenden Paare $(q, c) \in Q \times \Sigma$ definieren wir $\delta_M(q, c) = \emptyset$.