ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf18

Lösungsvorschläge – Blatt 6

Zürich, 2. November 2018

Lösung zu Aufgabe 17

Zum Beweis, dass $\mathcal{P}(\Sigma_{\text{bool}}^*)$ überabzählbar ist, haben wir in der Vorlesung gezeigt, dass

$$|\,[0,1]\,| \leq |\mathcal{P}(\Sigma_{\text{bool}}^*)|.$$

Offenbar gilt $\mathcal{P}(\Sigma_{\text{bool}}^*) \subseteq \mathcal{P}(\{0,1,2\}^*)$ und damit auch

$$|\,[0,1]\,| \leq |\mathcal{P}(\{0,1,2\}^*)|.$$

Es bleibt also noch

$$|\,[0,1]\,| \geq |\mathcal{P}(\{0,1,2\}^*)|$$

zu zeigen, wozu wir eine injektive Abbildung von $\mathcal{P}(\{0,1,2\}^*)$ nach $[0,1]$ angeben.

Eine Menge $P \subseteq \{0,1,2\}^*$ kann als unendlicher Bitvektor $(b_1, b_2, \ldots)$ dargestellt werden, wobei $b_i = 1$ genau dann, wenn das in kanonischer Reihenfolge i-te Wort über dem Alphabet $\{0,1,2\}$ in P enthalten ist.

Es reicht also aus, zu zeigen, dass für die Menge $\mathcal{B}$ aller unendlichen Bitvektoren gilt, dass $|\mathcal{B}| \leq |\,[0,1]\,|$. Hierzu konstruieren wir eine injektive Abbildung $f\colon \mathcal{B} \to [0,1]$, die wie folgt definiert ist:

$$f((b_1, b_2, \ldots)) := \sum_{i=1}^{\infty} b_i \cdot 10^{-i}\,.$$

Diese Abbildung ist injektiv, womit die Behauptung gezeigt ist. Hierbei ist zu beachten, dass wir die Folge $(b_1, b_2, \ldots)$ als *Dezimalbruch*, nicht als Dualbruch $0,b_1b_2\ldots$ betrachten. Hier ist $0,0\overline{1}$ nicht dasselbe wie $0,1\overline{0}$ (das wäre $0,0\overline{9}$). Bei Dualdarstellung (also mit $b_i \cdot 2^{-i}$ in der Formel) gilt die Injektivität nicht.

Lösung zu Aufgabe 18

Wir zeigen zunächst mit Hilfe eines indirekten Beweises, dass L_1 nicht rekursiv aufzählbar ist. Angenommen, L_1 sei rekursiv aufzählbar. Dann gibt es eine Turingmaschine M mit $L(M) = L_1$. Weil M eine der Turingmaschinen in der kanonischen Aufzählung aller Turingmaschinen sein muss, existiert ein $j \in \mathbb{N}$, so dass $M_j = M$. Wir betrachten nun das Wort w_{j^2}. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
w_{j^2} \in L_1 &\iff M_j \text{ akzeptiert } w_{j^2} \text{ nicht} \quad \text{(nach Definition von } L_1)\\
&\iff M \text{ akzeptiert } w_{j^2} \text{ nicht} \quad \text{(nach Definition von } M)\\
&\iff w_{j^2} \notin L(M)\\
&\iff w_{j^2} \notin L_1.
\end{aligned}
$$

Dies ist ein Widerspruch, also war die Annahme falsch und L_1 ist nicht rekursiv aufzählbar.

Für die Sprache L_2 kann man keinen analogen Beweis führen wie für L_1. Der Beweis für L_1 basiert ja darauf, dass in der Liste jede Turingmaschine erfasst ist und daher auch die angenommene Maschine für die betrachtete Sprache. Dies gilt zwar hier auch, führt aber nicht zum Widerspruch, da diese Maschine auch eine Nummer haben kann, die nicht von der Form i^2 für ein $i \in \mathbb{N}$ ist.

Man bemerke, dass man aus dem Fehlschlagen dieses Beweisansatzes nicht folgern kann, dass L_2 rekursiv aufzählbar wäre.

Lösung zu Aufgabe 19

Der Weg des Frosches ist von zwei Parametern abhängig, die uns unbekannt sind: Der Ursprung seiner Wanderung $u \in \mathbb{Z}$ und die Anzahl Schritte $s \in \mathbb{Z} - \{0\}$, die er pro Nacht zurücklegt. Dabei bedeutet eine negative Anzahl von Schritten eine Bewegung auf der Zahlengeraden nach links. Abhängig von diesen Parametern befindet sich der Frosch am Tag $t \in \mathbb{N}$ an der Position $u + s \cdot t$.

Um den Frosch zu fangen, reicht es aus, alle Parameter-Paare (u, s) nacheinander auszuprobieren, also eine Nummerierung von $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ anzugeben. In der Vorlesung (vgl. Lemma 5.2 im Buch) haben wir bereits eine Nummerierung von $(\mathbb{N} - \{0\}) \times (\mathbb{N} - \{0\})$ kennengelernt, die dem Paar (a, b) die Nummer $f((a, b)) = \binom{a+b-1}{2} + b$ zuordnet. Hieraus erhalten wir in einem ersten Schritt einfach eine Nummerierung g von $(\mathbb{Z} - \{0\}) \times (\mathbb{Z} - \{0\})$, die dem Paar $(u, s) \in (\mathbb{Z} - \{0\}) \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ die natürliche Zahl

$$
g((u,s)) = \begin{cases}
4(\binom{u+s-1}{2} + s) & \text{für } u, s > 0\\
4(\binom{u-s-1}{2} - s) - 1 & \text{für } u > 0 \text{ und } s < 0\\
4(\binom{-u+s-1}{2} + s) - 2 & \text{für } u < 0 \text{ und } s > 0\\
4(\binom{-u-s-1}{2} - s) - 3 & \text{für } u, s < 0
\end{cases}
$$

zuordnet. Diese Nummerierung nutzt für jeden der vier Quadranten die Nummerierung aus der Vorlesung und zählt immer abwechselnd ein Element aus jedem Quadranten auf. Weil f eine Bijektion ist, ist offenbar auch g bijektiv.

Wir haben jetzt aber noch nicht berücksichtigt, dass der Startpunkt der Froschwanderung auch der Punkt 0 sein darf. Um eine Nummerierung h von $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ anzugeben, nutzen wir die Nummerierung g und zählen immer abwechselnd ein Element aus $(\mathbb{Z} - \{0\}) \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ (auf den geraden Positionen) und ein Element aus $\{0\} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ (auf den ungeraden Positionen) auf. Damit ergibt sich

$$
h((u,s)) = \begin{cases}
2g((u,s)) & \text{für } u \neq 0\\
4s - 1 & \text{für } u = 0 \text{ und } s > 0\\
-4s - 3 & \text{für } u = 0 \text{ und } s < 0
\end{cases}
$$

An den ungeraden Positionen wird dabei immer abwechselnd ein Paar $(0, s)$ mit $s > 0$ und eines mit $s < 0$ aufgezählt. Die so definierte Funktion ist eine Bijektion vom Raum der möglichen Parameter der Froschwanderung in die natürlichen Zahlen.

Damit ergibt sich folgende Strategie, um den Frosch zu fangen: Teste am Tag $t \in \mathbb{N}$ das Parameterpaar (u, s) mit $h((u, s)) = t$, versuche also den Frosch auf der Position $u + s \cdot t$ zu fangen. Mit dieser Strategie wird jede mögliche Parameterkombination irgendwann getestet, also wird der Frosch nach endlicher Zeit gefangen.